Priv.-Doz. Dr. W. Wesemann, Köln

Die Grenzen der Sehschärfe, Teil 3:

Einfluss von Aperturblende und Heisenbergscher Unschärferelation

In meinem letzten Beitrag (DOZ 9, 2001) wurde die Begrenzung der Sehschärfe bei kleinen Pupillendurchmessern durch die Lichtbeugung veranschaulicht. In dieser Folge wird gezeigt, dass sich die schlechte Sehschärfe bei sehr kleinen Aperturdurchmessern nicht nur aus der Wellenoptik sondern auch aus der Heisenbergschen Unschärferelation ableiten lässt.

Einleitung

In einem Beitrag (DOZ 4, 2001) äußerte Riedl die Vermutung, die Sensorik des menschlichen Auges könne die Gesetze der Lichtbeugung außer Kraft setzen. Riedl stellt sich vor, dass nicht die materielle Augenpupille (die Iris) das Lichtbündel begrenzt, sondern eine geheimnisvolle „sensorische“ Aperturblende. Diese subjektive Aperturblende soll aus dem gesamten einfallenden Bündel nur einen kleinen Ausschnitt selektieren. Riedl meint, durch diese sensorische Aperturblende sei es möglich, die Probleme der Lichtbeugung zu vermeiden. Er schreibt: „Auswertungen von Hornhauttopographien (…) lassen den Schluss zu, dass an der vom Gehirn wahrgenommenen zentralen Abbildung lediglich ein Hornhautareal von (…) weniger als 1,0 mm Durchmesser beteiligt ist. Ein solcher Bündeldurchmesser wäre mit körperlichen Blenden nicht realisierbar, weil dabei Beugung in einer Größenordnung aufträte, die die Sehschärfe erheblich reduzierte.“

Insofern stellt sich die Frage, ob man eventuell mit einer Einschränkung des Lichtbündels durch eine „sensorische“ Aperturblende einen höheren Visus erzielen kann, als mit einer „materiellen“ Blende?

Man kann mit den Gesetzen der Wellenoptik beweisen, dass das Problem der Lichtbeugung auch durch eine sensorische Selektion von Lichtstrahlen nicht beseitigt werden kann. Wenn man zum Beispiel den Einfluss des Stiles-Crawford-Effekts auf das Auflösungsvermögen mit der Wellenoptik erfassen will, so kann man rechnerisch so tun, als sei das Auge mit einem Apodisationsfilter ausgestattet. Ein solches Filter absorbiert das einfallende Licht in der Mitte weniger stark als am Rande der Apertur.

In diesem Artikel soll aber ein anderer Weg beschritten werden. Es soll nämlich mit dem Teilchenmodell des Lichtes nachgewiesen werden, dass eine sensorische Selektion von Lichtstrahlen aus einem engen Raumbereich grundsätzlich zu einer Bildunschärfe und deshalb zu einem schlechten Visus führt. Dazu soll im Folgenden eines der berühmtesten Naturgesetze der modernen Physik – die Heisenbergsche Unschärferelation – auf die Ausbreitung von Licht im Auge angewandt werden.

Die Heisenbergsche Unschärferelation und das Auflösungsvermögen des Auges

Die Quantenmechanik zählt zu den jüngsten Teilgebieten der Physik. Sie wurde erst in diesem Jahrhundert entwickelt und erlaubt eine mathematische Beschreibung von Phänomenen der Atom- und Elementarteilchenphysik.

Zu den grundlegenden Gesetzen der Quantenmechanik zählt die Heisenbergsche Unschärferelation. Dieses Gesetz besagt, dass es in der Welt der Elementarteilchen prinzipiell nicht möglich ist, sowohl den Ort als auch den Impuls eines Elementarteilchens gleichzeitig exakt zu bestimmen. Die mathematische Schreibweise der Unschärferelation lautet (Landau und Lifschitz, 1976):

$$(6) \qquad \Delta y \cdot \Delta p_y = \hbar \qquad \text{bzw.} \qquad \Delta p_y = \frac{\hbar}{\Delta y}$$

Einstein hat bis zu seinem Lebensende erfolglos gegen die Grundgedanken der Quantenmechanik opponiert. Sein berühmter Ausspruch „Gott würfelt nicht“ zeigt, wie wenig er von der Unbestimmtheit der Elementarteilchenphysik begeistert war. Dennoch wurde die Heisenbergsche Unschärferelation in allen wissenschaftlichen Überprüfungen bis heute immer wieder bestätigt.

In Gleichung (6) ist Δy die Ungenauigkeit (die Unschärfe), mit der die y-Koordinate eines beliebigen Elementarteilchens bestimmt werden kann, und Δp_y die Ungenauigkeit der Impulskomponente in die gleiche Raumrichtung. Die Konstante $\hbar$ ist das sogenannte Plancksche Wirkungsquantum.

(7) $$\hbar = 1{,}054 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{Js}$$

Häufig wird für $\hbar$ auch das um 2π größere h verwendet.

Je genauer der Ort eines Teilchens gemessen wird (das heißt je kleiner Δy ist), desto größer ist nach der Unschärferelation zwangsläufig die Unschärfe der Impulskomponente in dieselbe Raumrichtung Δp_y, da das Produkt aus beiden Unschärfen (Ungenauigkeiten) immer den konstanten Wert $\hbar$ ergeben muss.

In der Vorstellung der Elementarteilchenphysik besteht das Licht aus kleinsten Teilchen – den Photonen. Diese Photonen sind masselos und bewegen sich stets mit Lichtgeschwindigkeit. Nach Louis deBroglie (1892 – 1987) kann der Impuls eines Photons aus der Wellenlänge des Lichtes über die Formel

(8) $$p = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}$$

berechnet werden. Um nun herauszubekommen, welche Einschränkungen sich aus der Unschärferelation für die Abbildungsqualität des Auges ergeben, muss man daran denken, dass nur solche Photonen zur Abbildung beitragen können, die durch die Augenpupille in das Auge eintreten. Aus dieser Tatsache kann man natürlich folgern, dass jedes einzelne Photon an irgend einer Stelle des Pupillenquerschnitts in das Auge hinein geflogen sein muss. Wo genau die Stelle ist, an der das Photon die Pupille passierte, ist aber prinzipiell nicht bekannt. Bei einer Augenpupille mit einem Durchmesser D beträgt die Unsicherheit, mit der wir die Eintrittsstelle jedes einzelnen Photons angeben können, folglich:

(9) $$\Delta y = \pm \frac{D}{2}$$

Wenn die Selektion nicht durch eine materielle Pupille, sondern durch eine wie auch immer geartete sensorische Aperturblende erfolgt, so muss stattdessen deren Durchmesser D verwendet werden. Setzt man die Unsicherheit des Ortes Δy in die Formel (6) ein, so erhält man für die Unsicherheit des Impulses in die Raumrichtung y:

(10) $$\Delta p_y = \frac{\hbar}{\Delta y} = \frac{2\hbar}{D}$$

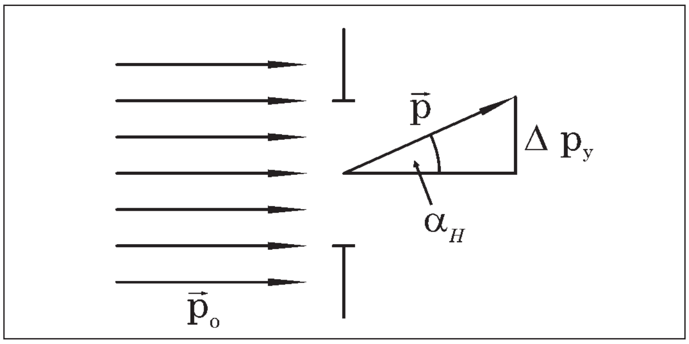

Abb. 1: Skizze zur Unsicherheit des Impulses der Photonen. Vor dem Spalt bewegen sich alle Photonen in die gleiche achsenparallele Richtung. Nach der Blende ist die Ausbreitungsrichtung jedes einzelnen Photons im Mittel mit einer Impulsunsicherheit Δp_y behaftet. Da sich die Wellenlänge des Lichts nicht ändert, bleibt der Gesamtimpuls p erhalten ($p = p_o$). Aus dem rechtwinkligen Dreieck lässt sich der typische Ablenkwinkel α_H nach Formel (11) berechnen.

Als Folge der genau bekannten Unsicherheit des Ortes der Photonen $\Delta y = D/2$ steht jetzt also auch die Unsicherheit des Impulses Δp_y fest. Diesen Wert möchte ich im Folgenden in einen optometrisch anschaulicheren Wert umrechnen.

Um zu erkennen, was die Unsicherheit des Impulses Δp_y bedeutet, betrachte man die Abbildung 1. In ihr wurde angenommen, dass alle Photonen, die auf die Blende zufliegen, sich zunächst achsenparallel und mit dem Impuls p_o vorwärts bewegen. Nach der Passage der Pupille kann jedes einzelne Photon aber in eine nicht genau vorhersagbare Richtung weiter fliegen, denn nun kommt bei jedem Photon eine Impulsunsicherheit von der Größenordnung Δp_y hinzu. Die typische Richtungsänderung lässt sich durch einen Winkel charakterisieren, der hier mit α_H bezeichnet werden soll. Diesen Winkel erhält man aus dem rechtwinkligen Dreieck in Abbildung 1 über die Formel:

(11) $$\alpha_H = \arcsin\left(\frac{\Delta p_y}{p}\right)$$

Wenn wir die Gleichungen (8) und (10) in Gleichung (11) einsetzen, so erhalten wir einen Wert für den mittleren Winkel α_H, um den die Photonen abgelenkt werden.

(12) $$\alpha_H = \arcsin\left(\frac{2\hbar}{D} \cdot \frac{\lambda}{2\pi\hbar}\right)$$

(13) $$\alpha_H = \arcsin\left(\frac{\lambda}{\pi D}\right) \approx 0{,}32 \arcsin\left(\frac{\lambda}{D}\right)$$

Vergleich von Teilchenmodell und Wellenoptik

Welche anschauliche Bedeutung hat dieser Winkel? Er soll nach Heisenberg's Vorstellungen ein Maß für die typische Ablenkung sein, die die Photonen im Mittel erleiden. Um zu überprüfen, ob dies tatsächlich so ist, habe ich den Wert, der sich aus der Unschärferelation ergibt, mit der Lichtverteilung verglichen, die sich aus der Wellenoptik ergibt. Da aus Gründen der mathematischen Vereinfachung hier eindimensional gerechnet wurde, kann zum Vergleich die Lichtverteilung bei der Beugung am Spalt herangezogen werden. Nach der Beugung an einem Spalt findet man im Fernfeld die Intensitätsverteilung:

$$I(\alpha) \sim \left(\frac{\sin(\pi\alpha)}{(\pi\alpha)}\right)^2 \tag{14}$$

Diese Funktion wird auch als sinc²-Funktion bezeichnet. In Abbildung 2 sieht man das zentrale Maximum und die ersten zwei Nebenmaxima dieser Funktion.

Mit Hilfe der Integralrechnung kann man den Winkel α_{Median} ausrechnen, der die Fläche unter der gesamten sinc²-Funktion in zwei exakt gleiche Teile teilt. Die nichttriviale Rechnung ergibt:

$$\alpha_{Median} \approx 0{,}27 \cdot \arcsin\left(\frac{\lambda}{D}\right) \tag{15}$$

Dieser Winkel ist in Abbildung 2 eingezeichnet. Außerdem ist der Winkel α_H, der sich aus der Unschärferelation ergibt, durch einen Pfeil markiert. α_H ist nur minimal größer als der Winkel α_{Median}, der das Beugungsbild in zwei energetisch gleiche Teile teilt.

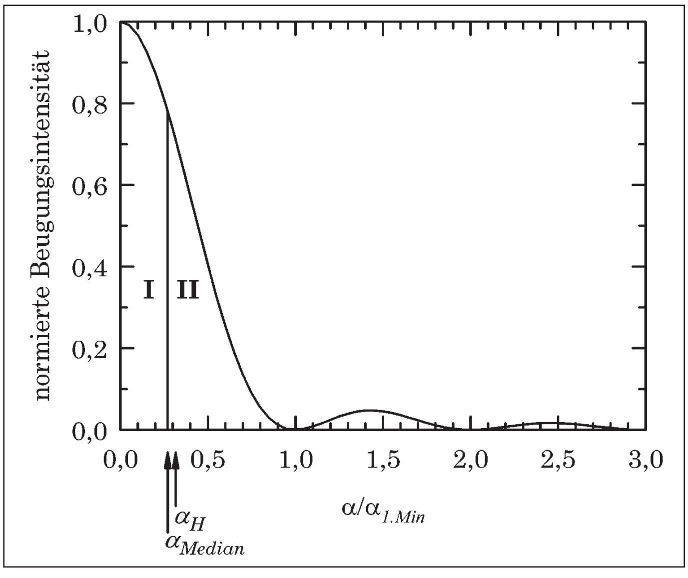

Abb. 2: Intensitätsverteilung im Beugungsbild eines Spaltes (sinc²-Funktion). Die durchgezogene vertikale Linie an der Stelle α_{Median} teilt die Intensitätsverteilung im Beugungsbild genau in die zwei energetisch gleiche Hälften I und II. Zur Fläche II gehört auch die Intensität aller höheren Nebenmaxima. Anschaulich gesprochen fallen genauso viele Photonen in den mit „I" bezeichneten Winkelbereich von 0 bis α_{Median} wie in den mit „II" gekennzeichneten Winkelbereich von α_{Median} bis ∞.
Zusätzlich ist der mittlere Ablenkwinkel α_H eingetragen, der sich aus der Heisenbergschen Unschärferelation ergibt. Beide Winkel α_H und α_{Median} sind fast gleich.

Die Unschärferelation und die Wellenoptik ergeben also ganz ähnliche Ergebnisse. Je kleiner die Aperturblende ist, durch die jedes Photon hindurch muss, desto größer wird der mittlere Ablenkungswinkel, unter dem sich das Photon nach der Passage der Blende weiter bewegt.

Bei einer extrem kleinen Blende wird der Ort der Photonen sehr genau festgelegt. Dann ist Δy sehr klein und die Impulsunsicherheit Δp_y riesengroß. Es ist dann vollkommen unklar, in welche Richtung die Photonen nach der Blende weiter fliegen werden, da alle Ausbreitungsrichtungen gleich wahrscheinlich sind.

Wichtig für die obigen Überlegungen ist, dass die Unschärferelation nicht nur für materiellen Blenden gilt. Es ist den Elementarteilchen und der Quantenmechanik völlig gleichgültig, ob die Selektion der Photonen durch eine reale Aperturblende (zum Beispiel die Iris des Auges), durch den Stiles-Crawford-Effekt, durch eine virtuelle oder schließlich durch eine gedachte sensorische Aperturblende realisiert wird. In allen Fällen läuft es darauf hinaus, dass eine Einschränkung des Ortes der selektierten Photonen stattfindet. Es werden nur Photonen erfasst, die aus einem bestimmten, umschriebenen Raumbereich kommen. Diese „Ortsbestimmung" im quantenmechanischen Sinne erzwingt eine Bildunschärfe, die umso größer ist, je genauer der Ort eingegrenzt wird.

Aus der Unschärferelation ergibt sich also, dass das Auflösungsvermögen des Auges nicht nur durch die Lichtbeugung, sondern auch durch die quantenmechanischen Naturgesetze begrenzt wird. Auch durch eine, wie auch immer geartete „sensorische Selektion" der Photonen, kann man diesem Naturgesetz kein „Schnippchen" schlagen.

Zusammenfassung

Zusammenfassend kann man festhalten, dass eine „sensorische" Einschränkung des Lichtbündels bei kleinen Aperturdurchmessern keine gute Sehschärfe zulässt, da eine solche Bündeleinschränkung stets eine „Messung des Ortes der Photonen" im Sinne der Quantenmechanik darstellt. Eine solche Bestimmung des Ortes der Photonen führt aufgrund der Heisenbergschen Unschärferelation zwangsläufig zu einer Unsicherheit in der Flugrichtung der Photonen und damit zu einer Unschärfe des Bildes auf der Netzhaut. Diese Bildunschärfe ist praktisch genau so groß wie die, die von der Beugungstheorie vorhergesagt wird.

Für alle Leser, denen die hier vorgelegten Gedanken ungewohnt und schwierig erscheinen, möchte ich zum Schluss einen Ausspruch des deutschen Physikers Wolfgang Ketterle zitieren, der am 9. Oktober 2001 mit dem Physik-Nobelpreis ausgezeichnet wurde. Ketterle schrieb: „Quantenmechanik ist kulturell so wichtig wie Goethe und Beethoven. Davon nichts zu verstehen, ist eine echte Wissenslücke."

Anschrift des Autors:
Priv.-Doz. Dr. W. Wesemann,
Höhere Fachschule für Augenoptik Köln,
Bayenthalgürtel 6-8, 50968 Köln

Literatur:

[1] Landau L.D., Lifschitz E.M, Quantenmechanik. Akademie Verlag Berlin, S. 49, (1967).