

Wo liegt die lichterenergetische „Mitte“ der Augenpupille? Betrachtungen zum Stiles-Crawford-Effekt 1. Art

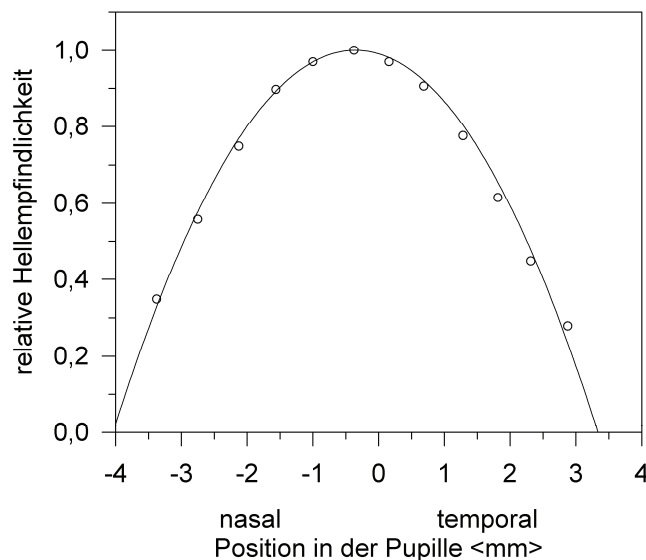
PD Dr. W. Wesemann,
Höhere Fachschule für Augenoptik Köln, Bayenthalgürtel 6-8, 50968 Köln

Neues Optiker Journal 3/1996, S. 10-14

Einleitung

Der Stiles-Crawford-Effekt 1. Art verändert die subjektiv empfundene Helligkeit. Er bewirkt, daß Lichtstrahlen, die nahe der Pupillenmitte in das Auge einfallen, heller empfunden werden als Strahlen, die nahe dem Pupillenrand in das Auge gelangen. Er wirkt wie ein Apodisationsfilter, der die peripheren Teile der Pupille abschattet. Aus augenoptischer Sicht ist diese Erfindung der Natur für die Abbildungsqualität außerordentlich vorteilhaft, da sie dafür sorgt, daß die Abbildungsfehler im Randbereich des Linsensystems des Auges nicht zu stark in Erscheinung treten. In Abb. 1 sieht man, daß dieser Effekt erhebliche Werte annimmt.

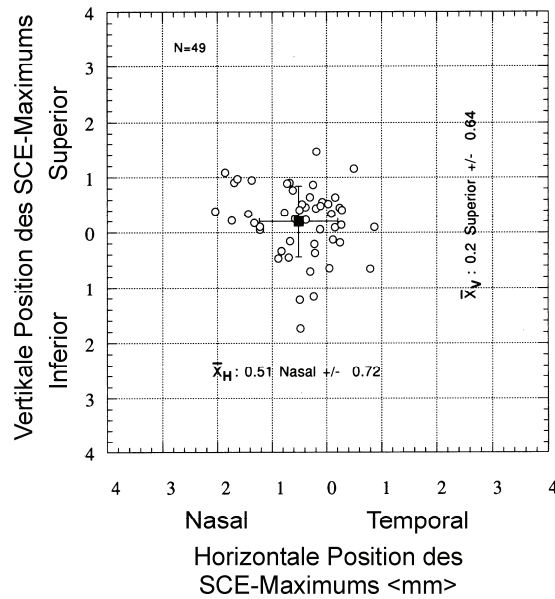
Abbildung 1



Aus dem Verlauf der Stiles-Crawford-Funktion folgert man, daß schräg in die Photorezeptoren einfallendes Licht schlechter von den Rezeptoren absorbiert wird. Dies wird auf einen „Hohlleiter“-Effekt der Photorezeptoren zurückgeführt (Enoch, 1991).

Bei den meisten Menschen stimmt die Position des Maximums der Stiles-Crawford-Funktion nicht genau mit der geometrischen Pupillenmitte überein. Im Mittel ist sie um ca. 0,5 mm nach nasal und um 0,2 mm nach oben versetzt (siehe Abb. 2). Die interindividuelle Streuung der Daten ist aber erheblich. Infolge der Verschiebung des Maximums liegt der Schwerpunkt der vom Rezeptor absorbierten Lichtmenge nicht mehr in der Pupillenmitte, sondern er ist aus der Pupillenmitte in Richtung auf die Position des Stiles-Crawford-Maximums verschoben. Dieser Umstand ist in der Vergangenheit im Zusammenhang mit Fragen zur Brillenglaszentrierung diskutiert worden (Riedl, NOJ 1/96).

Abbildung 2



Ich nehme diese Diskussion zum Anlaß, um hier die zwei folgenden Fragen zum Stiles-Crawford-Effekt mit mathematischen Methoden exakt zu behandeln.

- a) Welche Ringzone der Augenpupille liefert den größten Beitrag zu der vom Photorezeptor absorbierten Lichtmenge?
- b) Wo liegt der Schwerpunkt des von den Rezeptoren „gesehenen“ Lichtbündels?

1. Gleichung des Stiles Crawford Effekt:

Um an das Problem mathematisch herangehen zu können, braucht man eine Formel für den Stiles-Crawford-Effekt. Ich verwende als Gleichung eine einfache, nach unten geöffnete Parabel

$$(1) \quad z = -a(x - x_v)^2 + 1$$

Der Faktor a charakterisiert, wie schnell die Parabel außerhalb des Maximums nach unten abfällt. Die Variable x_v bezeichnet die Strecke, um die das Maximum gegenüber der Pupillenmitte verschoben ist.

Wenn man die Gleichung (1) an die von Stiles und Crawford (1933) gemessenen Daten anpaßt, findet man die Werte $a = 0.0735$ und $x_v = -0.3532$. Wie man in Abb. 1 sieht, erreicht man durch diese einfache Formel eine recht gute Annäherung an die experimentellen Daten.

Für die folgenden Rechnungen reicht diese einfache 1-dimensionale Darstellung aber nicht aus. Man benötigt eine 2-dimensionale Formel, die den Stiles-Crawford-Effekt für alle Punkte der Augenpupille richtig beschreibt. Die Erweiterung auf den 2-dimensionalen Fall gelingt durch den Ansatz

$$(2) \quad z = -a((x - x_v)^2 + y^2) + 1$$

Diese Funktion ist ein dezentriertes Paraboloid (Abb.3) mit einem Maximum bei $x_{\max} = x_v$ und $y_{\max} = 0$.

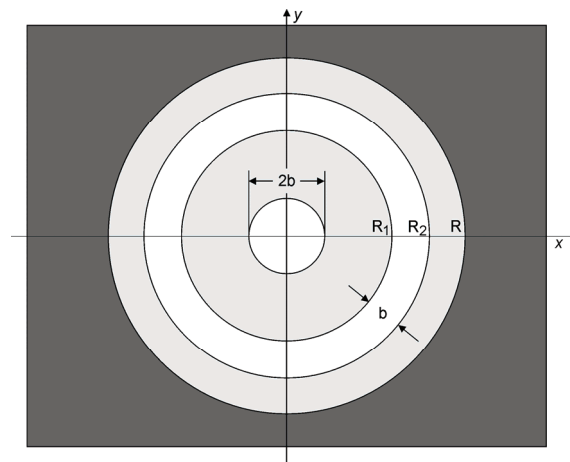
Abbildung 3 hier einsetzen

Diese Abbildung kann ich z.Zt. nicht finden

2. Zoneneinteilung in der Augenpupille

Für die weiteren Rechnungen unterteile ich die Pupille in eine Reihe verschiedener Ringzonen der Breite b <mm> (siehe Abb. 4). Jede dieser Ringzone läßt sich durch ihren inneren und äußeren Radius R_1 und R_2 charakterisieren. Die zentrale Zone (mit $R_1=0$) ist kein Ring im eigentlichen Sinne, sondern ein Kreis mit dem Durchmesser $2b$.

Abbildung 4



3. Berechnung der vom Rezeptor absorbierten Lichtmenge

Um zu errechnen, wie stark jeder dieser Kreisringe zu der Lichtmenge, die von den foveolaren Photorezeptoren absorbiert wird, beiträgt, müssen alle Punkte im Inneren der jeweiligen Ringzone mit der Stiles-Crawford-Funktion *gewichtet* und anschließend *aufsummiert* werden. Dies geschieht mathematisch durch das Integral über die mit der Stiles-Crawford-Funktion gewichtete Ringfläche

$$(3) \quad Q_v = \iint_{\text{Ringfläche}} (-a((x - x_v)^2 + y^2) + 1) dx dy$$

Fall 1: Maximum der Stiles-Crawford-Funktion genau in der Pupillenmitte

Sehr einfach wird die Ausrechnung des Integrals, wenn wir zunächst annehmen, daß die Stiles-Crawford-Funktion ihr Maximum genau in der Pupillenmitte hat. In diesem Fall darf in Gleichung (1) und (2) die Variable $x_v = 0$ gesetzt werden. Das Integral (Gl.3) läßt sich dann in Zylinderkoordinaten auf die einfache Gleichung

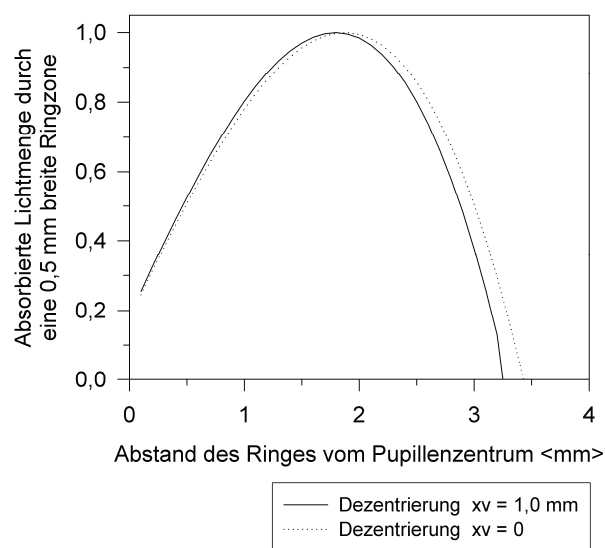
$$(4) \quad Q_v = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} (-ax^2 + 1) x dx$$

zurückführen. Die Integrationsgrenzen R_1 und R_2 bezeichnen den oben definierten inneren und äußeren Rand des Ringes. Die Ausrechnung des Integrals ergibt ein Maß für die durch diese Ringzone einfallende und vom Photorezeptor absorbierte Lichtmenge.

$$(5) \quad Q_v = -\frac{1}{2} \pi R_2^2 (aR_2^2 - 2) + \frac{1}{2} \pi R_1^2 (aR_1^2 - 2)$$

Das Ergebnis zeigt, daß die Lichtmenge von R_1 , R_2 , und a abhängt. In Abbildung 5 habe ich diese „effektive“ Lichtmenge als Funktion des inneren Ringradius R_1 für 5 verschiedene Ringbreiten ($b = 0; 0,25; 0,5; 0,75$ und $1,0$ mm) zeichnerisch dargestellt.

Abbildung 5



Die Kurven fangen in der Pupillenmitte bei kleinen Werten an und erreichen ihr Maximum je nach Ringbreite zwischen $R_{1\max} = 1,61$ und $2,13$ mm. Die durch diese peripheren Zonen aufgenommene Lichtmenge ist trotz der Benachteiligung durch den Stiles-Crawford-Effekt also wesentlich größer als die Lichtmenge, die durch die zentrale Zone fällt. Rechnet man die halbe Ringbreite zu dem $R_{1\max}$ -Wert hinzu so erhält man für die Mitte der Ringzone, die den Rezeptor am stärksten erregt, die Zahlenwerte $R_{\text{mitte}} = R_{1\max} + b/2 = 2,130; 2,128; 2,125; 2,119; 2,110$ mm. Die Lage des Ringes, der am meisten zur Helligkeitswahrnehmung beiträgt, ist somit nahezu unabhängig von der Ringbreite.

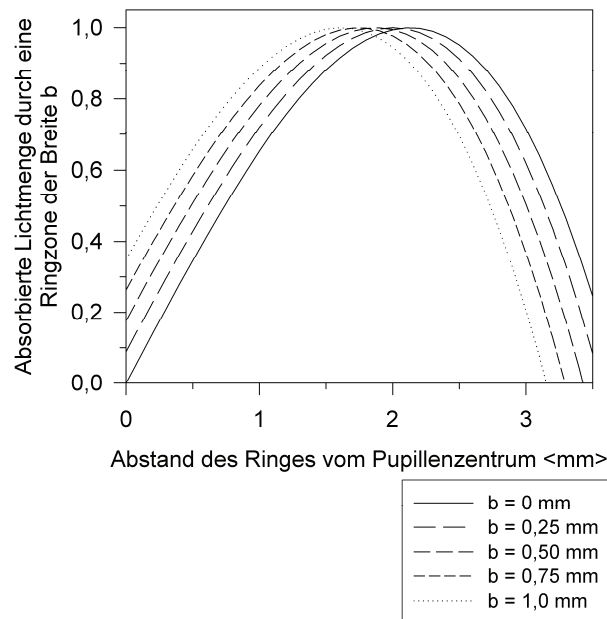
Fall 2: Maximum der Stiles-Crawford-Funktion außerhalb der Pupillenmitte

Wenn das Maximum der Stiles-Crawford-Funktion gegenüber der Pupillenmitte dezentriert ist, ist die Ausrechnung des Integrals schwieriger und mit der üblichen Schulmathematik nicht leicht zu bewältigen. Dann läßt sich das Flächenintegral nämlich nicht mehr auf ein einfaches Integral wie in Formel (4) zurückführen. Deshalb lasse ich hier alle Zwischenschritte weg und gebe nur das Ergebnis für die von einer Ringzone von R_1 bis R_2 erzeugte Lichtmenge an.

$$(6) \quad Q_v = R_2^2 \pi - ax_v^2 R_2^2 \pi - \frac{1}{2} a R_2^4 \pi - R_1^2 \pi + ax_v^2 R_1^2 \pi + \frac{1}{2} a R_1^4 \pi$$

Der Verlauf dieser Funktion für eine angenommene Verschiebung des Stiles-Crawford-Maximums von $x_v = -1$ mm und eine Ringbreite von $b = 0,5$ mm ist in Abb. 6 zu sehen. Er unterscheidet sich nur wenig von dem Verlauf für eine zentrierte Stiles-Crawford-Funktion ($x_v = 0$). Auch bei einer dezentrierten Stiles-Crawford-Funktion tragen also die Ringzonen, die im Abstand von ca. 2 mm außerhalb der Pupillenmitte liegen, am meisten zur Erregung der foveolaren Photorezeptoren bei.

Abbildung 6



4. Berechnung des Schwerpunktes der von den foveolaren Photorezeptoren absorbierten Lichtmenge.

Bei einer auf den Mittelpunkt der Pupille zentrierten Stiles-Crawford-Funktion liegt auch der energetische Schwerpunkt des von den Photorezeptoren absorbierten Lichts genau in der Mitte der Pupille. Ist das Stiles-Crawford Maximum nach nasal verschoben, so ist auch der Lichtschwerpunkt in diese Richtung versetzt.

Um die Position des Lichtschwerpunktes zu erhalten, muß man die x-Achse so ausrichten, daß sie sowohl durch die Pupillenmitte als auch durch das Maximum der Stiles-Crawford-Funktion verläuft. Dies ist durch Gleichung (2) gewährleistet.

Dann ist die obere Hälfte des Paraboloids oberhalb der x-Achse symmetrisch zu dem unter der x-Achse gelegenen Teil. Aus der Symmetrie kann man folgern, daß der Schwerpunkt des Lichtbündels genau auf der x-Achse liegen muß.

Die exakte Position des Schwerpunktes auf der x-Achse erhält man, wenn man ausrechnet, welche parallel zur y-Achse laufende Gerade das verschobene Paraboloid in zwei gleiche Teile teilt.

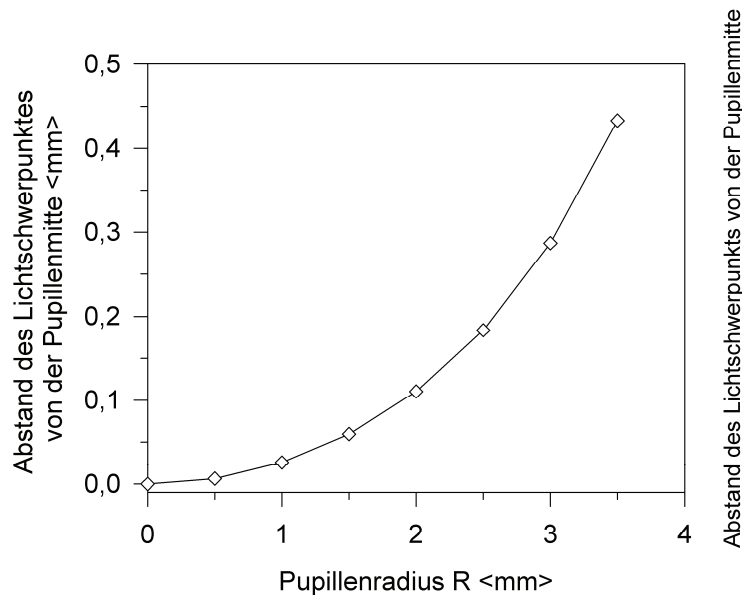
Aus der Integralgleichung, die man aus dieser Forderung aufstellen kann, erhält man nach aufwendiger Rechnung die folgende Bestimmungsgleichung für die x-Koordinate des Lichtschwerpunktes:

$$f(R, x_m) = \frac{2}{3} a (R^2 - x_m^2)^{3/2} x_m + 2R^2 \arcsin\left(\frac{x_m}{R}\right) + 2\sqrt{R^2 - x_m^2} x_m - aR^2 \sqrt{R^2 - x_m^2} x_m$$

$$-\frac{8}{3} a (R^2 - x_m^2)^{3/2} x_v - 2ax_v^2 R^2 \arcsin\left(\frac{x_m}{R}\right) - aR^4 \arcsin\left(\frac{x_m}{R}\right) - 2ax_v^2 \sqrt{R^2 - x_m^2} x_m = 0$$

x_m hängt von dem Pupillenradius R sowie von a und x_v ab. Abbildung 6 zeigt den aus dieser Gleichung folgenden Zusammenhang zwischen der Position des Lichtschwerpunktes x_m und dem Pupillenradius R für eine Verschiebung des Maximums von $x_v = 0,5$ mm. Bei kleinen Pupillenradien liegt der Lichtschwerpunkt fast in der Pupillenmitte. Bei größeren Pupillenradien verschiebt sich der Lichtschwerpunkt zunehmend in Richtung auf die Position des Maximums der Stiles-Crawford-Funktion. Bei einem Pupillenradius von 2 mm ist er um ca. 1/5 der Versetzung des Stiles-Crawford Maximums verschoben.

Abbildung 7



Zusammenfassung:

Die in diesem Artikel beschriebenen Eigenschaften des Auges kann man wie folgt zusammenfassen.

- 1.) Man kann die Auswirkungen des Stiles-Crawford-Effekts auf die Lichtabsorption in den Photorezeptoren und auf die subjektive Helligkeitswahrnehmung mit mathematischen Methoden behandeln und die auftretenden Gleichungen lösen.
- 2.) Der Stiles-Crawford-Effekt kann 1-dimensional durch eine nach unten geöffnete Parabel und 2-dimensional durch ein Paraboloid angenähert werden.
- 3.) Obwohl der Stiles-Crawford-Effekt die zentral durch die Pupille einlaufenden Lichtstrahlen höher bewertet als die Randstrahlen, tragen die Randzonen wegen ihrer größeren Fläche mehr zur Erregung der Photorezeptoren bei als das Pupillenzentrum.
- 4.) Die foveolaren Photorezeptoren werden am stärksten durch Ringzonen erregt, deren Ringmitte etwa 2,1 mm von der Pupillenmitte entfernt ist.
- 5.) Wenn das Maximum der Stiles-Crawford-Funktion gegenüber der Pupillenmitte dezentriert ist, liegt der Schwerpunkt der von den Rezeptoren absorbierten Lichtmenge außerhalb der Pupillenmitte.

- 6.) Der Lichtschwerpunkt befindet sich stets zwischen der Pupillenmitte und dem Maximum der Stiles-Crawford-Funktion.
- 7.) Die exakte Position des Lichtschwerpunkts hängt von der jeweiligen Pupillengröße und der Form der Stiles-Crawford-Funktion ab. Für den hier zugrundegelegten Verlauf der Funktion kann die Lage des Lichtschwerpunkts aus Abb. 7 abgelesen werden.

Warum die Natur es so eingerichtet hat, daß die Stiles-Crawford-Funktion im Mittel leicht nach nasal dezentriert ist, ist bis heute nicht genau bekannt. Mehr Licht würden die Photorezeptoren sammeln, wenn sie genau auf die Pupillenmitte ausgerichtet wären.

Zusatz von 2008: Zusammenhang mit der Brillenglaszentrierung und der PD-Messung

Derzeit gibt es zwei gängige Verfahren zur Pupillendistanzmessung: die Pupillenreflexmethode und die Pupillenmittenmethode. Bei der einen Methode werden die Messlinien des Pupillometers auf den Hornhautreflex eingestellt. Bei der anderen Methode stellt man so gut wie möglich auf die Pupillenmitte ein. Es ist bekannt (Wesemann, Bartz, Arnolds, 1997), dass die Pupillenreflexmethode im Mittel eine um 0,5 mm kleinere PD liefert als die Pupillenmittenmethode.

Eigentlich sollte die Zentrierung idealerweise auf den lichtenergetischen Schwerpunkt der Augenpupille erfolgen. Dieser Lichtschwerpunkt liegt nach dem oben gesagten, zwischen der Pupillenmitte und dem meistens (aber nicht immer) weiter nasal gelegenen Maximum der Stiles-Crawford-Funktion.

Man erkennt aus dieser Betrachtung, dass der Stiles-Crawford-Effekt eigentlich bei der Brillenglaszentrierung berücksichtigt werden müsste. Leider gibt es bis heute keine leicht durchführbare Methode zur Vermessung des Stiles-Crawford-Effekts.

Deshalb kann der ideale Zentrierpunkt in der täglichen Praxis des Augenoptikers bis heute nicht genau ausgemessen werden. Fest steht, dass die lichterenergetische Mitte der Pupille irgendwo in der Nähe von Pupillenmitte und Hornhautreflex liegt. Wo genau läßt sich aber erst dann sagen, wenn der Stiles-Crawford-Effekt und der genaue Verlauf der Abbildungsstrahlen im Linsensystem des Auges mitberücksichtigt werden. Dies ist aber bislang noch nicht möglich..

Literatur:

- 1.) Stiles W.S., Crawford B.H., The luminous efficiency of rays entering the eye pupil at different points. Proc. R. Soc. London Ser. B 112, 428-450, (1933).
- 2.) Enoch J.M., Lakshminarayanan V., Retinal fiber optics. In: Vision and Visual Dysfunction, Charman N. (Hsrg.), Macmillan, London, Vol.1, 280-309, (1991).
- 3.) Applegate R.A., Parametric representation of Stiles-Crawford functions: normal variation of peak location and directionality. Journ. Opt. Soc. Am. 10, 1611-1623, (1993).
- 4.) Riedl H.W., Stiles-Crawford-Effekt 1. Art. NOJ 1/1996, 24-31.
- 5.) Wesemann, W., Bartz, J.U., Arnolds, P. (1997) Messgenauigkeit und Reproduzierbarkeit von PD-Messgeräten und Unterschiede zwischen der Zentrierung auf Pupillenmitte bzw. auf Hornhautreflex. Deutsche Optiker Zeitung 2/1997, 18-22.

Abbildungsbeschriftungen:

Abbildung 1: Stiles-Crawford-Effekt (SCE, 1933): Ein Lichtstrahl, der 3 mm temporal von der Pupillenmitte in das Auge einfällt, wird nur noch mit einer relativen Hellempfindung von 0,2 wahrgenommen. Das bedeutet, er erscheint dem Beobachter subjektiv 5 mal dunkler als ein Strahl, der durch das Maximum der Stiles-Crawford-Funktion (SCF) in das Auge gelangt. Zusätzlich eingezeichnet ist die an die experimentellen Daten angepaßte Parabel mit den Konstanten $a = 0.0735$ und $x_v = -0.3632$.

Abb. 2: Die Meßpunkte geben die genaue Lage des Maximums der Stiles-Crawford-Funktion (SCF) wieder. (nach Applegate und Lakshminarayanan, 1993, gemessen bei 49 Augen).

Abbildung 3: 2-dimensionales Paraboloid des Stiles-Crawford Effekts nach Gl. (2).

Abbildung 4: Skizze der Einteilung der Augenpupille in Ringzonen der Breite b . Jeder Ring ist gekennzeichnet durch den Abstand seines inneren und äußeren Randes R_1 und R_2 von der Pupillenmitte. Der zentrale Ring ist kein Ring sondern ein Kreis vom Durchmesser $2b$.

Abbildung 5: Lichtmenge, die von den Photorezeptoren unter Berücksichtigung des Stiles-Crawford-Effekts durch einen Kreisring mit dem inneren Radius R_1 absorbiert wird. Die Kurven gelten für Ringbreiten von $b = 0; 0,25; 0,5; 0,75$ und $1,0$ mm. Die zentralen Zonen der Pupille liefern wesentlich weniger Licht als die peripheren Zonen. Den größten Anteil an der Belichtung des Photorezeptors liefern Ringzonen, deren Mitte einen Abstand von ca. 2,1 mm von der Pupillenmitte aufweisen. (Alle Kurven wurden für die graphische Darstellung auf 1 normiert.)

Abbildung 6.: Einfluß einer Verschiebung des SC-Maximums auf die Lichtmenge, die von den Photorezeptoren durch einen Kreisring mit dem inneren Radius R_1 absorbiert wird. Die durchgezogene Linie gilt für eine Verschiebung des Maximums von $x_v = -1,0$ mm. Die betrachtete Ringbreite war $b = 0,5$ mm.

Abbildung 7: Abstand des Lichtschwerpunktes von der Pupillenmitte als Funktion des Pupillradius R . Bei kleinen Pupillradien liegt der Lichtschwerpunkt nahe der Pupillenmitte. Bei größeren Pupillradien wandert der Lichtschwerpunkt immer mehr in Richtung auf die Position des Maximums der Stiles-Crawford-Funktion aus. Angenommen wurde $a = 0,0735$ und $x_v = 0,5$.