PD Dr. W. Wesemann,
Höhere Fachschule für Augenoptik Köln

Mathematische Anmerkungen:

Welche Beziehung besteht zwischen der normalen sphäro-zylindrischen Schreibweise von Korrektionsgläsern und den Zernike-Polynomen?

Vor einer wellenfrontgesteuerten Hornhautchirurgie werden die Abbildungsfehler mit einem Aberrometer gemessen. Als Ergebnis der Messung erhält man ca. 25 Zernike-Koeffizienten, mit denen man die Fehler des untersuchten Auges darstellen kann. Diese mathematische Beschreibung der Abbildungsfehler unterscheidet sich fundamental von der üblichen sphäro-zylindrischen Beschreibung einer Fehlsichtigkeit.

Gibt es einen Zusammenhang zwischen der sphäro-zylindrischen Schreibweise und den Zernike-Koeffizienten? Wenn ja, wie lautet er?

Die folgenden mathematischen Anmerkungen versuchen, diese Fragen zu beantworten und den exakten Zusammenhang zu erläutern. Sie ergänzen meine DOZ-Artikel in Heft 12/04 und 1/05.

Die übliche sphäro-zylindrische und die Power-Vektor Darstellung

Eine Ametropie wird üblicherweise durch den sphärischen Brechwert S, den zylindrischen Brechwert C und die Zylinderachse α des Korrektionsglases gekennzeichnet.

Um den Zusammenhang mit den Zernike-Polynomen herzustellen, muss man die klassische Schreibweise der Fehlsichtigkeit zunächst in eine andere Form überführen, die im englischsprachigen Raum als „Power-Vektor Darstellung" bezeichnet wird. In der Power-Vektor Darstellung verwendet man anstelle des sphärischen Brechwerts S das sphärische Äquivalent SÄ.

1) $$S\ddot{A} = S + \frac{1}{2}C$$

Das sphärische Äquivalent beschreibt die Stärke des besten sphärischen Glases, mit dem der Kreis der kleinsten Verwirrung auf die Netzhaut abgebildet wird.

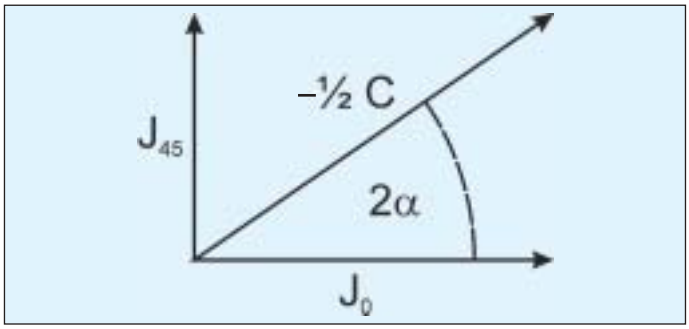

Abb. 1) Vektorzerlegung der zylindrischen Korrektion.

Zur Beschreibung des Astigmatismus werden in der Power-Vektor Darstellung anstelle der Stärke des korrigierenden Minuszylinders C und der Zylinderachse α zwei Zylinderkomponenten J_0 und J_{45} verwendet, die man durch eine Vektorzerlegung erhält (Abb. 1 und Thibos und Horner, 1997 und 2001). J_0 kennzeichnet die Vektorkomponente des korrigierenden Jackson-Kreuzzylinders mit horizontaler bzw. vertikaler Achslage. J_{45} kennzeichnet die Vektorkomponente des korrigierenden Kreuzzylinders mit schrägen (45°, 135°) Achsen.

2) $$J_0 = -\frac{1}{2}C\cos(2\alpha)$$
$$J_{45} = -\frac{1}{2}C\sin(2\alpha)$$

Insgesamt wird die Fehlsichtigkeit also durch einen Power-Vektor mit den drei Komponenten (SÄ, J_0, J_{45}) vollständig beschrieben. Alle drei Komponenten tragen die Einheit <Dioptrie>. Eine Achsenangabe ist nicht mehr nötig. Da das englische Wort „Power" in der Optik mit Brechkraft bzw. Brechwert übersetzt wird, könnte man diesen Vektor auf Deutsch auch als „Brechkraftvektor" bezeichnen.

Diese Schreibweise erscheint zunächst ungewohnt. Eine derartige Vektorzerlegung des Astigmatismus fand aber bereits Anfang der 80er Jahre in dem freisichtigen Phoropter „Vision Analyser" der Fa. Humphrey eine praktische Anwendung. Bei diesem Phoropter wurde während der Refraktionsbestimmung zuerst das beste sphärische Glas aufgesucht. Im Anschluss daran wurde die horizontale bzw. vertikale Zylinderkomponente J_0 mit einem speziellen Dreistrichtest korrigiert. Danach erfolgte die Korrektion der schrägen Zylinderkomponente J_{45}.

Aus diesen beiden Komponenten kann man die Stärke des korrigierenden Minuszylinders C über den Satz des Pythagoras berechnen.

3) $$C = -2\sqrt{J_0^2 + J_{45}^2}$$

Die Zylinderachse a erhält man über die Formel

4) $$\alpha = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{J_{45}}{J_0}\right)$$

Die übliche Kennzeichnung der Fehlsichtigkeit durch Sphäre, Zylinder und Achse ist mathematisch äquivalent zur Beschreibung der Fehlsichtigkeit durch die drei Komponenten des Power-Vektors (SÄ, J_0, J_{45}). Beide Darstellungen können mit obigen Formeln ineinander umgerechnet werden.

Die wellenoptische Beschreibung von Abbildungsfehlern

Bei der Wellenfrontanalyse von Abbildungsfehlern werden Begriffe der Wellenoptik verwendet. Worin liegt der wesentliche Unterschied zur Strahlenoptik?

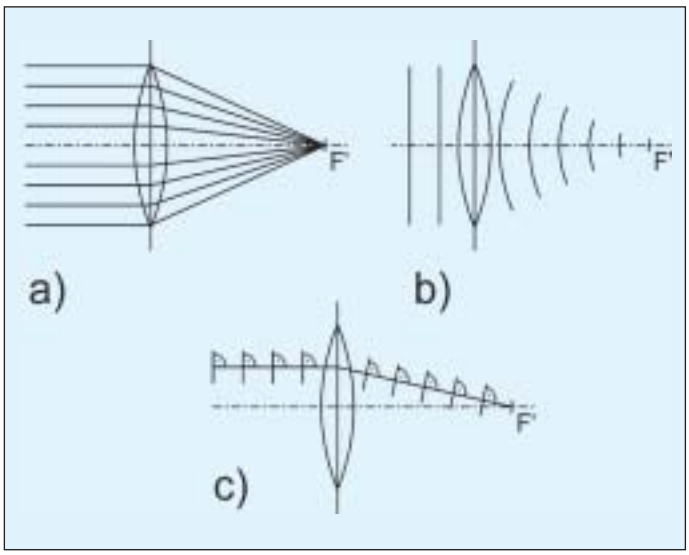

Abb. 2a) Lichtstrahlen, 2b) Wellenfronten, 2c) Lichtstrahlen und Wellenfronten stehen senkrecht aufeinander.

In der strahlenoptischen Darstellung stellt man sich Lichtstrahlen vor, die nach dem Brechungsgesetz abgelenkt werden. So bricht eine fehlerfreie Pluslinse ein einlaufendes Parallelstrahlbündel derart, dass alle Lichtstrahlen im Brennpunkt zusammenlaufen (Abb. 2a).

In der wellenoptischen Formulierung wird das Licht nicht durch Strahlen, sondern durch Wellenfronten dargestellt. Eine Wellenfront kann man sich anschaulich z.B. als die Position eines Wellenberges zu einem gegebenen Zeitpunkt vorstellen. In der Sprache der Wellenoptik verursacht eine Linse eine Verformung der einlaufenden Wellenfront. Eine fehlerfreie Pluslinse macht z.B. aus einer parallelen Lichtwelle eine konvergente Kugelwelle, die im Brennpunkt zusammenläuft (Abb. 2b).

Leicht zu merken ist die allgemeingültige Tatsache, dass ein Lichtstrahl immer senkrecht zu der dazugehörenden Wellenfront verläuft (Abb. 2c).

Der Wellenfrontfehler W

Mit dem Begriff „Wellenfrontfehler" bezeichnet man die Stärke der Abweichung einer Wellenfront vom „idealen" Verlauf. In Abb. 3 ist der Wellenfrontfehler W anschaulich dargestellt. Es wird angenommen, dass die Linse in Abb. 3 das Licht eigentlich im Brennpunkt F_{ideal} bündeln soll. Im oberen Teil der Linse in Abb. 3 sei der Brechwert aber stärker als er sein soll. Die Wellenfront wird deshalb stärker gekrümmt als nötig. Der dazugehörende Lichtstrahl läuft zu einem näher bei der Linse liegenden Punkt F_1. Im unteren Teil der Linse in Abb. 3 sei der Brechwert zu schwach. Die Wellenfront ist deshalb zu wenig gekrümmt. Der dazugehörende Lichtstrahl wird zu dem hinter F_{ideal} liegenden Punkt F_2 gelenkt.

www.ama-optik.de
AMA OPTIK

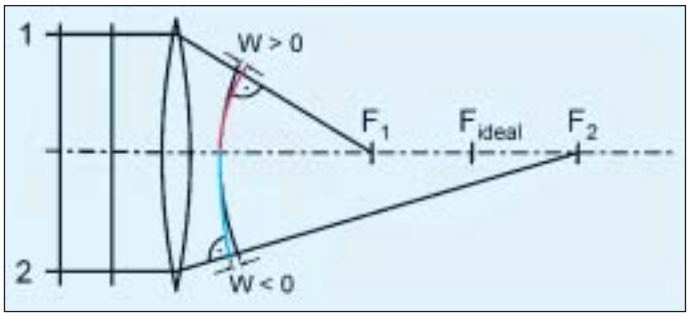

Abb. 3) Schematische Darstellung des Wellenfrontfehlers W. In der Abbildung wird angenommen, dass die Linse das Licht eigentlich im Brennpunkt F_{ideal} bündeln soll. Im oberen Teil der Linse sei der Brechwert aber zu stark. Die Wellenfront ist deshalb zu stark gekrümmt. Der Lichtstrahl läuft zum Punkt F_1. Im unteren Teil der Linse sei der Brechwert zu schwach. Die Wellenfront ist deshalb zu wenig gekrümmt. Lichtstrahl läuft zum Punkt F_2.
Der Gangunterschied zwischen der idealen Wellenfront (schwarz) und der tatsächlich vorliegenden Wellenfront wird in Mikrometern gemessen und als Wellenfrontfehler W bezeichnet. Im oberen Teil der Linse läuft die reale Welle (rot) voraus. Im unteren Teil der Linse läuft die reale Welle hinter der idealen her (blau).

Der Gangunterschied zwischen der idealen Wellenfront und der tatsächlich vorliegenden Wellenfront wird in der Einheit Mikrometer gemessen und als Wellenfrontfehler W bezeichnet. Im oberen Teil der Linse in Abb. 3 läuft die reale Welle der idealen voraus. Der Wellenfrontfehler W ist dann positiv. Im unteren Teil der Linse in Abb. 3 läuft die reale Welle hinter der idealen her. Der Wellenfrontfehler W ist dann negativ.

Wenn man die Abbildungsfehler über den gesamten Linsenquerschnitt beschreiben will, so muss man den Wert des Wellenfrontfehlers für alle Orte innerhalb der Linse angeben. $W(r,\Theta)$ ist also eine 2-dimensionale Funktion des Ortes $P(r,\Theta)$ in der Pupille.

Zerlegung des Wellenfrontfehlers in elementare Komponenten

Die komplexen Wellenfrontfehler eines realen Linsensystems bzw. des Auges kann man besser verstehen, wenn man den Gesamtfehler in elementare Komponenten zerlegt. Diese Zerlegung erfolgt heutzutage überwiegend auf der Basis der Zernike-Polynome.

Bei den Zernike-Polynomen handelt es sich um ein vollständiges Funktionensystem aus unabhängigen (orthogonalen) Funktionen, mit denen man eine beliebige Fehlerverteilung innerhalb eines Linsensystems oder innerhalb der Pupille des Auges auf eine eindeutige Art und Weise kennzeichnen kann. Insgesamt gibt es unendlich viele Zernike-Polynome. Für die Augenoptik sind aber nur die ersten 25 wichtig. Einige Beispiele für die Zernike-Polynome und ihre anschauliche Bedeutung sind in Abb. 4 und in Tabelle 1 aufgelistet.

Jedes Zernike-Polynom wird nach der von der Standardisierungskommission der Optical Society of America vorgeschlagenen Notation durch zwei Indizes gekennzeichnet. Der tiefgestellte Index n beschreibt die radiale Ordnung des Polynoms. Sie ist definiert durch den höchsten Exponenten in der formelmäßigen Darstellung. Der hochgestellte Index beschreibt die meridionale Frequenz - diese Zahl beschreibt die

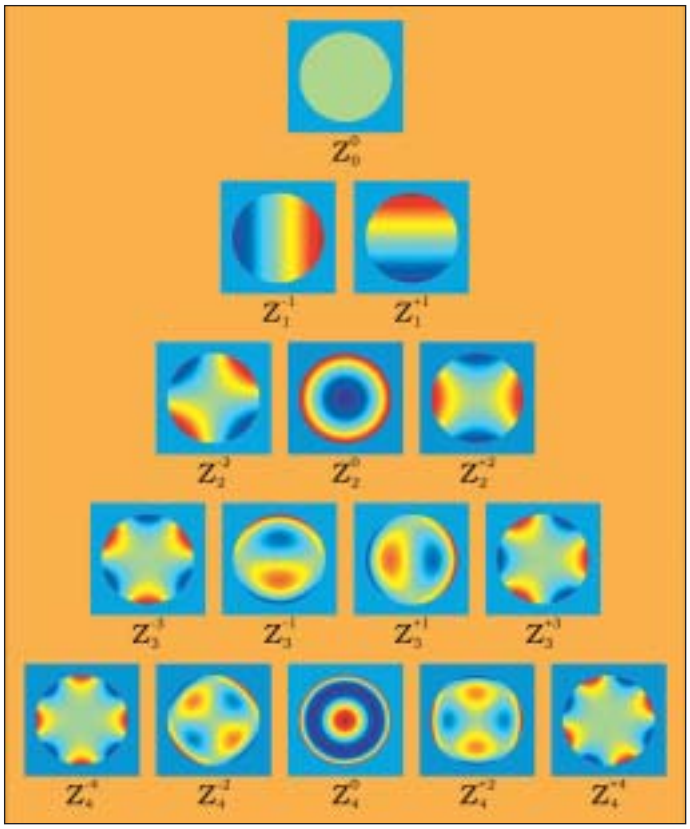

Abb. 4) 2-dimensionale farbkodierte Darstellung der Zernike-Polynome. Die verschiedenen elementaren Abbildungsfehler lassen sich in Form einer Pyramide sortiert darstellen. Der Komplexitätsgrad der Abbildungsfehler nimmt von oben nach unten zu. Grün: keine Wellenfrontfehler; rot: die Wellenfront läuft im Vergleich zu einer fehlerfreien Abbildung zu schnell; blau: die Wellenfront ist verzögert.

Fehlerfrei Abbildung	$Z_0^0 = 1$
Prismatischer Fehler mit Basis 0° oder 180°	$Z_1^{-1}(r,\theta) = 2r\sin\theta$
Prismatischer Fehler mit Basis 90° oder 270°	$Z_1^1(r,\theta) = 2r\cos\theta$
Zylindrischer Fehler mit Achse 45° oder 135°	$Z_2^{-2}(r,\theta) = \sqrt{6}r^2\sin 2\theta$
Sphärischer Fehler	$Z_2^0(r,\theta) = \sqrt{3}(2r^2-1)$
Zylindrischer Fehler mit Achse 0° oder 90°	$Z_2^2(r,\theta) = \sqrt{6}r^2\cos 2\theta$
Koma	$Z_3^1(r,\theta) = \sqrt{8}(3r^3-2r)\cos\theta$
Dreiachsiger Astigmatismus mit Achsen 60°, 180° und 300°	$Z_3^3(r,\theta) = \sqrt{8}r^3\cos 3\theta$
Sphärische Aberration	$Z_4^0(r,\theta) = \sqrt{5}(6r^4-6r^2+1)$

Tabelle 1: Mathematische Schreibweise einiger Zernike-Polynome in Polarkoordinaten

Anzahl der Schwingungsperioden der periodischen Wellenfrontfehler bei einem Umlauf um die Linsenmitte.

Die formelmäßige Darstellung erfolgt im Polarkoordinatensystem. Die Variable r kennzeichnet den Abstand des betrachteten Punktes innerhalb der Linse von der Mitte der Linse. Der Winkel Θ ist der Winkelabstand des jeweiligen Ortes von der Horizontalen. Die Variable r ist auf den Linsenradius r_p normiert und

nimmt deshalb Werte zwischen 0 und 1 an. Man erhält mit Hilfe der Formeln Werte für alle Punkte P(r,Θ) innerhalb der Linse.

Mit diesem mathematischen Rüstzeug lässt sich jeder beliebige Wellenfrontfehler W(r,Θ) durch eine unendliche Summe aller Einzelfehler darstellen.

5)
$$W(r,\theta)=\sum_{n,f} c_n^f Z_n^f(r,\theta)$$
$$W(r,\theta)=c_0^0 Z_0^0(r,\theta)+c_1^{-1}Z_1^{-1}(r,\theta)+c_1^1 Z_1^1(r,\theta)+c_2^{-2}Z_2^{-2}(r,\theta)+\ldots\ldots$$

Die Konstanten c_n^f sind Gewichtsfaktoren, die als Aberrationskoeffizienten oder Zernike-Koeffizienten bezeichnet werden. Sie geben an, mit welcher Stärke das jeweilige Zernike-Polynom Z_n^f zum Gesamtfehler beiträgt. Wenn eine bestimmte Konstante c_n^f gleich Null ist, zeigt dies, dass der dazugehörende Fehler Z_n^f in der Linse nicht vorkommt. Der gesamte Wellenfrontfehler W und die Koeffizienten c_n^f werden in der Maßeinheit Mikrometer angegeben.

Die Zernike-Darstellung der Abbildungsfehler ist für optometrisch oder medizinisch ausgebildete Fachleute ungewohnt und schwer zu interpretieren. Drei Zernike-Koeffizienten lassen sich aber direkt in die Power-Vektor Komponenten einer sphäro-zylindrischen Korrektion umrechnen. Die entsprechenden Umrechnungsformeln lauten (Thibos et al., 2002):

6)
$$SÄ < dpt >= \frac{-4\sqrt{3}}{r_p^{\,2}} c_2^0 < \mu m >$$

7)
$$J_0 < dpt >= \frac{-2\sqrt{6}}{r_p^{\,2}} c_2^{+2} < \mu m >$$

8)
$$J_{45} < dpt >= \frac{-2\sqrt{6}}{r_p^{\,2}} c_2^{-2} < \mu m >$$

Die Stärke des sphärischen Äquivalents kann man also aus dem Zernike-Koeffizienten c_2^0 ausrechnen. Die Astigmatismuskomponenten J_0 und J_{45} erhält man aus den Zernike-Koeffizienten c_2^{+2} und c_2^{-2}. Die in der Augenoptik üblichen Werte Zylinderstärke und Achse kann man anschließend über die Umrechnungsformeln (3) und (4) berechnen.

Diskussion

Man beachte, dass die Brechwertkomponenten SÄ, J_0 und J_{45} das entgegengesetzte Vorzeichen der Zernike-Koeffizienten haben. Dies rührt daher, dass die Koeffizienten den Refraktionsfehler des Auges beschreiben; SÄ, J_0 und J_{45} beschreiben hingegen den Brechwert des korrigierenden Brillenglases.

Die Formel (6) stimmt nur näherungsweise, wenn das Auge sphärische Aberration aufweist. Dann erhält der Augenoptiker bei der Refraktionsbestimmung einen sphärischen Messwert, der nicht nur vom sphärischen Fehler Z_2^0 sondern auch von der Stärke der sphärischen Aberration Z_4^0 und vom Pupillendurchmesser abhängt. Um dies zu berücksichtigen, müßte in Formel (6) ein zusätzlicher Term eingeführt werden, der den Zernike-Koeffizienten c_4^0 enthält.

In den Umrechnungsformeln (6) bis (8) taucht im Nenner der Pupillenradius r_p auf. Dies rührt daher, weil der Wellenfrontfehler am Rand einer Linse viel größer ist als nahe der Mitte (Abb.3). Bei einer vorgegebenen Fehlsichtigkeit hängt der maximal auftretende Wellenfrontfehler also vom Pupillenradius ab. Bei einer vorgegebenen sphärischen Fehlsichtigkeit hat das Korrektionsglas hingegen einen sphärischen Brechwert, der nicht vom Pupillenradius abhängt. Dieser Unterschied wird durch den Nenner von (6) - (8) berücksichtigt.

Aus den Formeln (6) bis (8) kann man ablesen, dass die Aberrationskoeffizienten c_2^0, c_2^{-2}, c_2^{+2} anders skaliert sind als die SÄ, J_0 und J_{45} - Werte. Um bei vorgegebener Pupillengröße gleich große Dioptrienwerte für SÄ, J_0 und J_{45} zu erhalten, müssen sich die Koeffizienten c_2^0, c_2^{-2}, c_2^{+2} wie $1:\sqrt{2}:\sqrt{2}$ verhalten.

In der konventionellen Dioptrienschreibweise der Augenoptik erhält man einen Astigmatismus mixtus, wenn die sphärische Fehlsichtigkeit gleich der Hälfte der Zylinderstärke ist und beide Fehler das entgegengesetzte Vorzeichen haben. Bei der Rechnung mit Zernike-Polynomen ergibt sich hingegen ein Astigmatismus simplex, wenn man zum sphärischen Fehler einen $\sqrt{2}$ mal so großen zylindrischen Fehler hinzuzählt - wenn also z.B. ein Abbildungsfehler von $Z_2^0 \pm \sqrt{2} Z_2^{\pm 2}$ vorliegt.

Zusammenfassung

Eine sphäro-zylindrische Fehlsichtigkeit läßt sich entweder durch die Angabe von

Sphäre, Zylinder und Achse

oder durch die Power-Vektor Komponenten

SÄ, J_0 und J_{45}

eindeutig kennzeichnen.

Mit den Zernike-Koeffizienten kann man nicht nur diese „normalen" Abbildungsfehler beschreiben, sondern zusätzlich auch alle Aberrationen höherer Ordnung. Der gesamte Wellenfrontfehler hat eine komplizierte mathematische Gestalt (5). Die drei Zernike-Koeffizienten

c_2^0, c_2^{-2}, c_2^{+2}

kann man aber mit einfachen Formeln in die Power-Vektor Darstellung und in die traditionelle augenoptische Schreibweise umrechnen.

Anschrift des Autors:
PD Dr. W. Wesemann,
Höhere Fachschule für Augenoptik,
Bayenthalgürtel 6-8,
50968 Köln,
E-Mail: *wesemann@hfak.de*

Literatur

1. Thibos, LN, Wheeler, W., Horner, D. (1997) Power Vectors: An application of Fourier analysis to the description and statistical analysis of refractive error. Optometry and Vision Science 74: 367-375.
2. Thibos, LN., D. Horner (2001) Power vector analysis of the optical outcome of refractive surgery. J Cataract Refract Surg; 27: 80-85.
3. Thibos LN, Hong X, Bradley A, Cheng X (2002) Statistical variation of aberration structure and image quality in a normal population of healthy eyes. J Opt Soc Am A; 19: 2329-2348.

Anhang

Wer war eigentlich Frits Zernike?

Frits Zernike wurde am 16. Juli 1888 in Amsterdam als zweiter Sohn von sechs Kindern geboren. Sein Vater, Carl Frederick August Zernike, war Mathematiklehrer und Leiter einer Grundschule. Er war ein hochbegabter Mann und interessierte sich für viele wissenschaftliche Gebiete. Er gab zahlreiche grundlegende Bücher heraus und auch seine pädagogischen Artikel fanden Beachtung. Seine Mutter, Antje Dieperink, war ebenfalls Mathematiklehrerin. Einer seiner Brüder wurde Physikprofessor. Eine seiner Schwestern, die mit dem bekannten Maler Jan Mankes verheiratet war, wurde als erste Frau in die holländische protestantische Kirche ordiniert. Eine andere Schwester war eine der führenden Schriftstellerinnen der Niederlande.

Frits erbte seine Leidenschaft für die Physik von seinem Vater. Schon als Junge besaß er ein Arsenal von Töpfen und Schmelztiegeln, die er von seinem Taschengeld finanzierte oder als Geschenke von verständnisvollen Firmen erhielt. Auf der weiterführenden Schule glänzte er in den wissenschaftlichen Fächern, vernachlässigte aber Gebiete wie Geschichte und Sprachen, eingeschlossen Altgriechisch und Latein. Deshalb musste er später eine staatliche Prüfung ablegen, um sich an der Universität einschreiben zu können.

Während seiner Schulzeit investierte er seine gesamte Freizeit in zahllose Experimente und berührte dabei auch den Bereich der farbigen Fotografie. Seine begrenzten finanziellen Mittel zwangen ihn dazu, Äther selbst herzustellen, den er für seine fotografischen Experimente benötigte. Andere Ergebnisse seines Einfallreichtums waren eine Fotokamera und ein astronomisches Miniaturobservatorium, ausgestattet mit dem Antrieb eines alten Plattenspielers, das ihm ermöglichte, Bilder von einem Kometen zu machen. Zusammen mit seinem Vater und seiner Mutter frönte er der Leidenschaft, schwierige mathematische Probleme zu lösen.

Er trat 1905 in die Universität von Amsterdam ein und studierte Chemie mit den Nebenfächern Physik und Mathematik. Sein Interesse an der Mathematik erwachte erneut, als er 1908 von der Universität Gronigen für eine preisgekrönte wissenschaftliche Arbeit eine Goldmedaille erhielt. Eine weitere Auszeichnung bekam er 1912 für eine optische Arbeit. Die Jury der Holländischen Gesellschaft für Wissenschaften setzte sich aus namhaften Wissenschaftlern dieser Tage zusammen, unter ihnen Lorentz und Van der Waals. Als er vor die Wahl gestellt wurde, ob er lieber die Goldmedaille oder Geld haben wolle, schrieb er zurück, dass er es bevorzugen würde, das Geld zu bekommen, da er schon einmal das Privileg gehabt hätte, eine Goldmedaille zu erhalten. Dieser preisgekrönte Aufsatz bildete die Grundlage für seine spätere Doktorarbeit (1915).

1913 lud ihn Kapteyn, der bekannte Astronomieprofessor der Universität Groningen, ein, sein Assistent zu werden. 1915 erhielt er seinen ersten Lehrauftrag an der Universität, aber nicht in Chemie oder Astronomie, sondern als Dozent für mathematische Methoden der Physik. 1920 wurde er zum Professor ernannt. Aus seiner experimentellen Arbeit ging ein besonders empfindliches Galvanometer hervor, das seit 1923 von der Firma Kipp & Söhne in Delft produziert wurde. Ab 1930 wandte er sich vermehrt der Optik zu. Er entwickelte das Phasenkontrastmikroskop und veröffentlichte wissenschaftliche Arbeiten über Abbildungsfehler und partielle Kohärenz. In diesen Arbeiten stellte er das Funktionensystem vor, das wir heute als Zernike Polynome bezeichnen. Gemeinsam mit seinen Schülern bestimmte er den Einfluss von Abbildungsfehlern auf die Lichtverteilung im Brennpunkt von Linsen (1938-1948).

Die großartige Entdeckung der Phasenkontrastmikroskope im Jahr 1930 erhielt nicht sofort die Aufmerksamkeit, die sie verdiente. Die Firma Zeiss/Jena unterschätzte zunächst den Wert des neuen Verfahrens. Dies änderte sich erst als die deutsche Wehrmacht alle Entwicklungen, die möglicherweise dem Krieg dienlich sein konnten, beschlagnahmte und ab 1941 das Phasenkontrastmikroskop produzieren ließ. Nach 1945 stellten auch viele andere Firmen das Phasen-kontrastmikroskop, das der Mikroskopie neue Möglichkeiten der Beobachtung an lebenden Zellen eröffnete, her. Sie trugen dadurch wesentlich zur Weiterentwicklung der modernen Medizin bei.

Frits Zernike

Zernike`s Arbeiten wurden von der niederländischen mikroskopischen Gesellschaft gewürdigt. Die Royal Society in London verlieh ihm die Rumford Medaille. Von der medizinischen Universität Amsterdam erhielt er die Ehrendoktorwürde.

1953 erhielt er für die Entwicklung des Phasenkontrastmikroskops den Nobelpreis für Physik.

Frits Zernike starb am 10. März 1966 in Naarden, einem kleinen Ort in der Nähe von Amsterdam.